

УДК 624.011

doi:10.31650/2707-3068-2025-29-130-141

**ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОБОТИ КОМБІНОВАНО-АРМОВАНОЇ
ДЕРЕВ'ЯНОЇ БАЛКИ ЗА ДОПОМОГОЮ ПЛОСКИХ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ****Михайловський Д.В.**, д.т.н., проф.,

ORCID: 0000-0003-3151-8630

Гомон П.С., докторант

p.s.homon@nuwm.edu.ua: ORCID: 0000-0003-2080-5650

*Київський національний університет будівництва та архітектури, м. Київ***Комар М.А.**, доктор філософії, м.н.с.,

ORCID: 0000-0002-3631-8999

ДП ДНТЦ ЯРБ

Анотація: В роботі наведений чисельний експеримент моделювання дерев'яних армованих балок за допомогою програмного комплексу ЛІРА-САПР. Розглянуті три способи моделювання арматури в конструкції балки: 1 спосіб - розміщення арматури у вигляді стержнів між вузлами плоских СЕ (скінченних елементів); 2 - приведення жорсткості скінченних елементів на проміжку де знаходиться арматура до приведеної жорсткості арматури та деревини; 3 - розміщення арматури у вигляді шару з центром, який відповідає осі розміщення арматури (при цьому площа арматури рівна площі шару, якою моделюється арматура). Проведено порівняння результатів чисельного експерименту з плоскими СЕ та об'ємними СЕ та з результатами експериментальних досліджень натурних балок.

Ключові слова: деревина, дерев'яна балка, конструкція, армування.

Постановка проблеми. Недоліком використання деревини в конструюванні балок є надмірна деформівність, що спричиняє виникнення великих прогинів та переміщень. Найефективнішим способом збільшення жорсткості є використання в конструкції балок жорстких армуючих елементів. При використанні армування елементів можна збільшити жорсткість балок та зменшити напруження в деревині. В сучасних умовах відсутні рекомендації по проектуванні армованих дерев'яних згинальних елементів [1,2] та відсутні приклади проектування таких конструкцій за допомогою сучасних програмних комплексів. Тому основною задачею стало дослідження способів чисельного моделювання армування дерев'яних балок.

Аналіз останніх джерел досліджень та публікацій. Вивченням наслідками армування дерев'яних балок займалося велика кількість науковців. Найчастіше в сучасній літературі зустрічаються роботи в яких розглядається додавання арматури в різного виду дерев'яні конструкції [3-15]. Всі автори відзначають збільшення жорсткості конструкцій та зменшення прогинів балок. Проте одною з проблемою наукового аналізу балок з деревини є їх чисельне моделювання за допомогою сучасних програмних комплексів, роботи які присвячені цій проблемі [16-22]. При виконанні чисельного моделювання за допомогою об'ємних скінченних елементів (надалі СЕ) була виявлена можливість моделювання таких згинальних елементів за допомогою плоских СЕ. Проте одною з проблем є методика моделювання армування таких елементів. Тому метою роботи є аналіз чисельного моделювання армування балок та співставлення їх з проведеними експериментальними дослідженнями [23-25].

Постановка цілей і завдань досліджень. Чисельне моделювання у вигляді плоских СЕ є хорошою альтернативою моделюванню об'ємними СЕ, бо цей варіант моделювання дозволяє зменшити трудовитрати проектувальника при виконанні складних розрахунків, але при цьому і дозволяє аналізувати напруження в конструкціях. Одною з основних проблем при моделюванні об'ємними СЕ є моделювання армування бо правильний підбір величини скінченних елементів не завжди можливий, а форма їх обмежена. Тому можливою

альтернативою армування у вигляді об'ємних елементів дерев'яних балок є вказування арматури між вузлами об'ємних елементів. При цьому сама конструкція має бути розбита на об'ємні елементи так, щоб вісь стержнів арматури співпадала з вузлами СЕ. Так само і при моделюванні плоскими СЕ виникає ряд проблем, які мають бути враховані при чисельному моделюванні. В роботі поставлена задача - провести чисельний експеримент з моделювання дерев'яних балок з різними способами моделювання армування.

Виклад основного матеріалу. Для моделювання дерев'яних балок було запропоновано три варіанти моделювання їх армування: 1 – спосіб розміщення арматури у вигляді стержнів між вузлами плоских СЕ; 2 – приведення жорсткості скінченних елементів на проміжку де знаходиться арматура до приведеної жорсткості арматури та деревини; 3 – розміщення арматури у вигляді шару з центром, який відповідає осі розміщення арматури (при цьому площа арматури та площа шару має співпадати).

Методика чисельного моделювання за допомогою плоских СЕ. Числове моделювання дерев'яних балок проводилось за допомогою програмного комплексу ЛПРА САПР. Весь змодельований елемент виконувався з плоских СЕ розміром $1 \times 1 \text{ см}^2$. Характеристики деревини задавались, як для ортотропного матеріалу. Основними фізико-механічними характеристиками матеріалу деревини, які необхідно задати для числового моделювання є: модуль пружності деревини вздовж волокон, модуль пружності деревини впоперек волокон, модулі зсуву та коефіцієнти Пуассона. Для моделювання СЕ деревини було використано модуль пружності, який був визначений шляхом експериментального випробування деревини балки, а також прийняті табличні значення модулів пружності деревини поперек волокон, модулі зсуву та коефіцієнти Пуассона. Всі фізико-механічні характеристики деревини занесені до таблиці 1. Фізико-механічні характеристики армуючі елементів: вуглецевої стрічки та сталеві арматури, також занесені до таблиці 1.

Таблиця 1.

Прийняті пружні та деформаційні характеристики матеріалів
для моделювання балок

Змодельована балка	Модулі пружності деревини, $E_{1,w}$, МПа	Модуль пружн. впоперек волокон, $E_{2,w}$, МПа	Коефіцієнт Пуассона ν_{12}, ν_{21}	Модуль пружн. армат., E_{arm} , МПа	Коефіцієнт Пуассона ν_{arm}	Модуль пружн. вуглец. стрічки, E_{carb} , МПа	Коефіцієнт Пуассона ν_c
GRB-12A	13000	400	$\nu_{12} = 0,018$ $\nu_{21} = 0,48$	205000	0,3	165000	0,3
GRB-12B	13000	400	$\nu_{12} = 0,018$ $\nu_{21} = 0,48$	205000	0,3	165000	0,3

В чисельній моделі експериментально досліджуваних балок з використанням ПК ЛПРА САПР, були збережені всі розміри елемента, а також розміщення та режим прикладання навантаження. В при опорній зоні, а також в місці прикладання навантаження в чисельній моделі було розміщено жорстку металеву пластину. Розрахункова схема балки а також поперечний переріз показаний на рис. 1.

При виконанні чисельного експерименту, особливу увагу було приділено моделювання армування, як зазначалось вище було змодельовані три способи моделювання.

В першому способі *розміщення арматури у вигляді стержнів між вузлами плоских СЕ*, виконується шляхом розбивки елементів дерев'яного зразка на СЕ таким чином, щоб вузли скінченних елементів співпадали з віссю арматури. Схематичне зображення показано на рисунку 1. При цьому варіанті моделювання слід враховувати заміщення деревини арматурою, шляхом зменшення модуля пружності арматури на величину модуля деревини [1]. При моделюванні потрібно провести сумування площ армуючих елементів, і вказати площу

стержнів рівною площі арматури. Найкраще для моделювання обирати стержневу систему з круглим перерізом. При цьому розрахунок діаметра можна виконати за формулою [2].

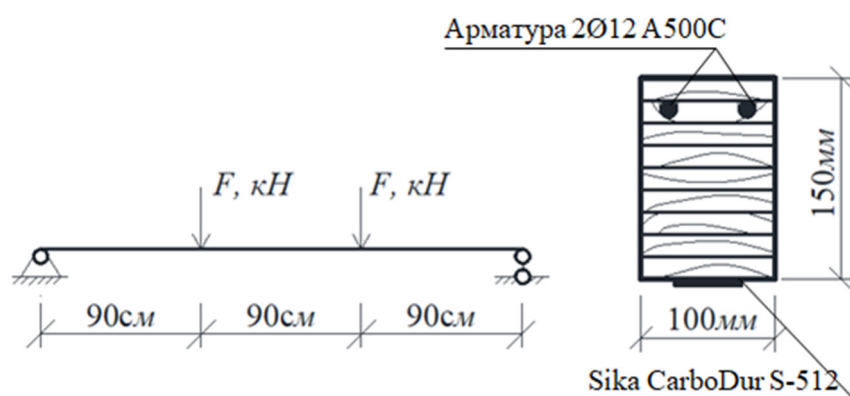


Рис. 1. Розрахункова схема та поперечний переріз змодельованої балки

$$E_{arm,CE1} = E_{arm} - E_{1,w}, \quad (1)$$

$$D = \sqrt{4A_s / \pi}, \quad (2)$$

де $E_{arm,CE}$ - модуль пружності СЕ елемента, в даному випадку стержня; E_{arm} - модуль пружності арматурного стержня; $E_{1,w}$ - модуль пружності деревини вздовж волокон; A_s - загальна площа армування, см^2 .

Моделювання армуючої вуглецевої стрічки виконувалось також за допомогою стержнів проте значення модуля пружності не занижувалось, тому що стрічка приклеювалась на дерев'яну балку і не заміщала деревину. Форма стержнів була прийнята прямокутною, яка відповідала ширині і товщині армуючої стрічки.

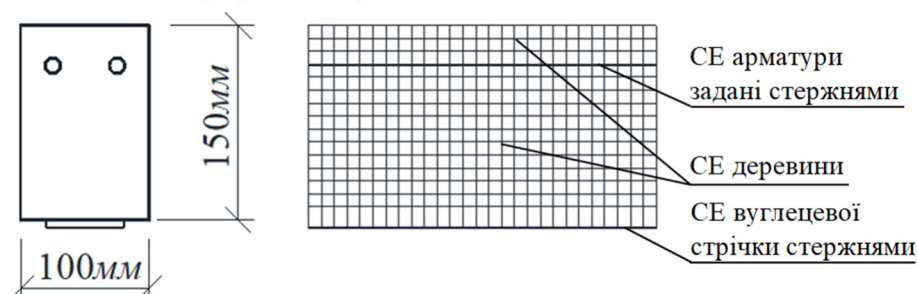


Рис. 2. Схематичне зображення способу армування деревини стержнями

За другого способу приведення жорсткості скінченних елементів на проміжку де знаходиться арматура до приведеної жорсткості арматури та деревини. Цей спосіб можна виконати, шляхом розбивки на СЕ таким чином, щоб краї арматури співпадали з краями СЕ. Так ряд СЕ в якому буде розміщуватись арматура буде мати приведений модуль пружності. Значення приведенного модуля пружності для такого шару СЕ можна записати за допомогою формули [3]. Ширина приведенного шару рівна шару самої балки і складає 10 см. Схематичне зображення способу моделювання показано на рис. 3. Як і металева арматура, вуглецеву арматуру можна привести до СЕ балки, з шириною рівною ширині СЕ пластини балки. Формула приведення для вуглецевої стрічки [4]. У такому випадку і металева арматура і вуглецева стрічка буде заватись при моделюванні плоскими елементами з товщиною рівною товщині СЕ пластини балки.

$$E_{arm,CE2} = \frac{E_{arm} A_{arm} + E_{l,w} A_{w,CE}}{A_{arm} + A_{w,CE}}, \quad (3)$$

де $A_{w,CE}$ - площа ділянки, яку займає деревина в скінченному елементі; A_{arm} - площа арматури.

$$E_{carb,CE2} = \frac{E_{carb} l_{carb}}{b}, \quad (4)$$

де l_{carb} - ширина вуглецевої стрічки; b - ширина скінченного елемента балки.

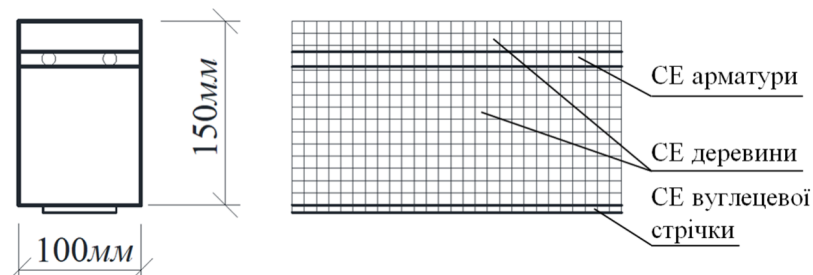


Рис. 3. Схематичне зображення способу армування шляхом приведення жорсткості

В третьому способі розміщення арматури у вигляді шару з центром, який відповідає осі розміщення арматури (при цьому площа арматури та площа шару має співпадати). Спосіб передбачає розміщення арматури у вигляді шару СЕ. Так як, площа шару є рівною площі арматури, тому приведення модуля пружності проводити не потрібно. Проте, необхідно визначити товщину шару металевої арматури і правильно розділити шари скінченних елементів. Схематичне зображення способу показано на рис. 4.

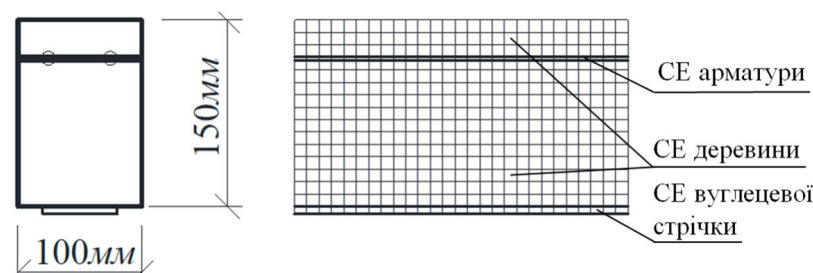


Рис. 4. Схематичне зображення способу армування шаром СЕ

Товщини шару металевої та вуглецевої арматури можна визначити приводячи до ширини СЕ балки, а саме $b = 10$ см. Тому товщина елементів буде рівною їх площі поділеної на ширину b . Для металевої арматури формула [5] та для вуглецевої стрічки формула [6].

$$t_{s,CE3} = A_s / b, \quad (5)$$

$$t_{carb,CE3} = A_{carb} / b, \quad (6)$$

де $t_{s,CE3}$, $t_{carb,CE3}$ - товщина шару металевої та вуглецевої арматури при моделюванні;

A_{carb} - площа армуючої вуглецевої стрічки.

Результати чисельного експерименту. Отримані ізополя напружень для балок з різними варіантами чисельного моделювання армування. Ізополя напружень для балки в якій арматура моделювалася стержнями зображена на рис. 5. Для цього варіанту моделювання (плоскими СЕ) отримані для такої балки характерний вигляд ізополів напружень, як і для об'ємних елементів. Максимальне значення прогину для такого елемента складає 15,6 мм. Максимальні повздовжні напруження згідно ізополів виникають біля місць прикладання навантаження і складають 23,3 МПа, при цьому максимальні напруження в центральному перерізі складають 15,6 МПа, для стиснутої зони та 19 МПа для розтягнутої зони. Для цього способу армування отримана епюра напружень, що виникає в центральній частині балки рис.

6. Для даної методики визначення напружень також є характерним зображення повздовжніх зусиль в стержнях, що моделюють роботу арматури. Проте для визначення напружень необхідно проводити розрахунки.

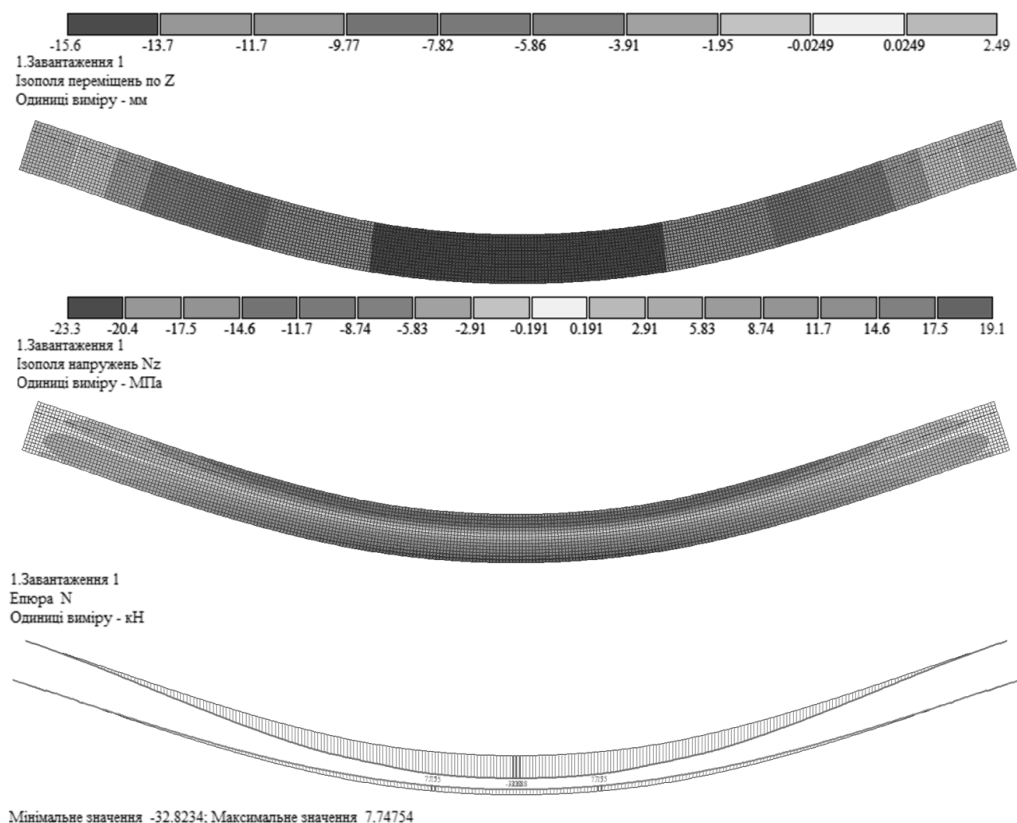


Рис. 5. Ізополі переміщень, напружень та зусиль для першого варіанту чисельного моделювання армування

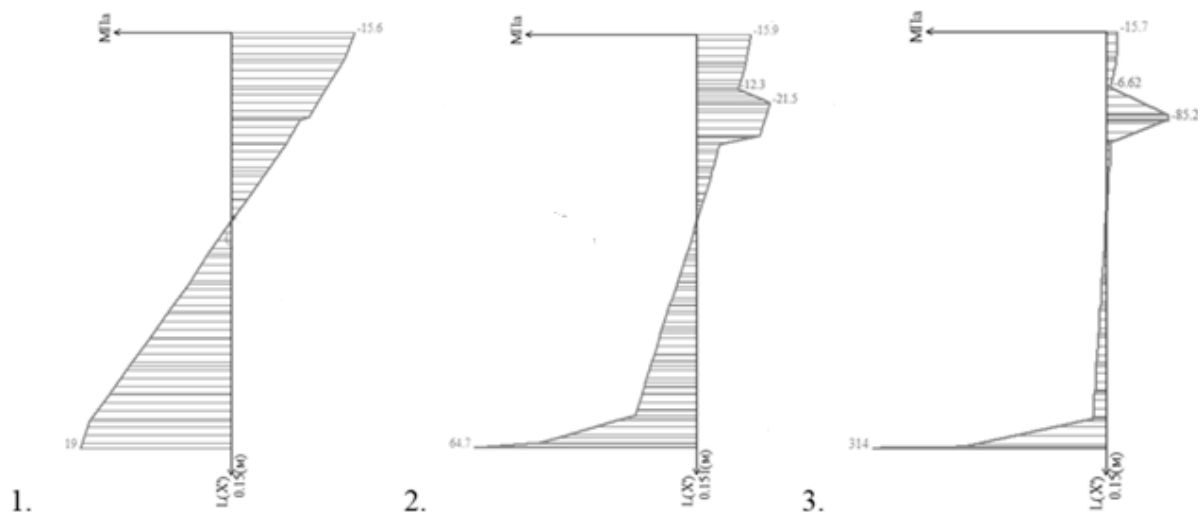


Рис 6. Отримані епюри напружень в центральних перерізах чисельно змодельованих балках плоскими елементами (1 - армування стержнями; 2 – спосіб армування з приведеними модулями; 3 – армування у вигляді шару арматури)

При другому варіанті моделювання армування рис.7 отримано максимальні вертикальні переміщення 14,6 мм, що є близьким до реального значення, який отриманий експериментом. Значення напружень стиску в центральній частині балки співпадають з напруженням першого випадку і складають 15,9 МПа. При цьому мінусом даного методу, що ми не можемо отримати дійсних значень напружень в арматурі. Для визначення напружень в арматурі потрібні

додаткові розрахунки. Також недоліком є перехід між арматурою та деревиною на діаграмах напружень, що показаний на рис. 6. В зв'язку з цим переходом не можливо встановити дійсні напруження в цих зонах.

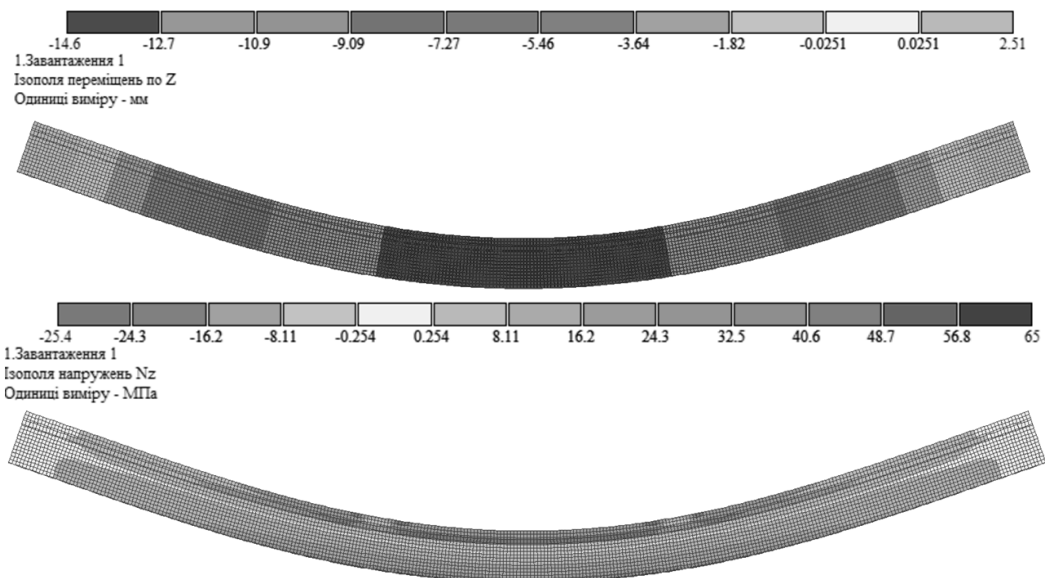


Рис. 7. Ізополя переміщень та напружень для першого варіанту чисельного моделювання армування

При третьому варіанті моделювання армування отримані ізополя переміщень показали хороший результат по визначенню вертикальних переміщень рис. 8. Максимальне вертикальне переміщення для балки 14,6 мм.

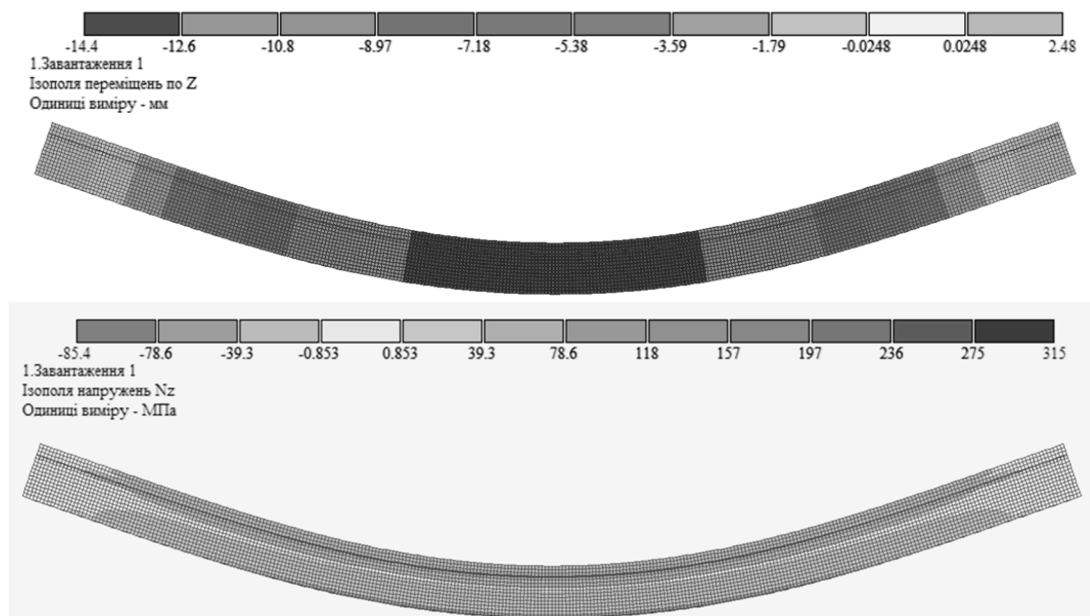


Рис. 8. Ізополя переміщень та напружень для третього варіанту чисельного моделювання армування

Встановлено, що значення напружень в стиснутій зоні центрального перерізу не сильно відрізняється від значень для перших варіантів армування, і складає 15,7 МПа. При цьому значення напружень в розтягнутій частині важко встановити ізза переходу між напруженнями

деревині і арматури. Проте, при даному варіанті чисельного моделювання армування з епюр напружень рис. 6 можна, встановити значення напружень, що виникають в арматурі та змодельовані вуглецевій стрічці. Значення напружень для арматури складають 85,2 МПа та для вуглецевої стрічки 315 МПа.

Проведемо порівняння отриманих значень вертикальних переміщень з переміщеннями отриманими за допомогою моделювання об'ємними скінченними елементами та деформативною методикою, а також з даними випробувань двох натурних зразків балок. Величини вертикальних переміщень та прогинів наведені в таблиці 2.

Таблиця 2

Величини вертикальних переміщень та прогинів отриманих експериментальним шляхом при випробуванні натурних зразків та чисельного моделювання

Діючий згинал. момент, кНм	Експериментальні значення прогинів балок, мм		Теоретичні значення вертикальних переміщень за різних способів моделювання, мм				
	GBR12A	GBR12B	Деформ. методика	Моделюв. ЛІРА-САПР об'ємними елементами	Моделюв. ЛІРА-САПР плоскими елемент.	Моделюв. ЛІРА-САПР плоскими елемент.	Моделюв. ЛІРА-САПР плоскими елемент.
0	0	0	0	0	0,0	0,0	0,0
2	2,63	3,12	2,84	3,94	3,5	3,2	3,2
4	5,58	5,8	5,85	7,88	6,9	6,5	6,4
6	8,31	8,54	8,94	11,81	10,4	9,7	9,6
8	11,22	11,38	12,06	15,75	13,9	13,0	12,8
10	14,35	14,13	15,17	19,56	17,3	16,2	16,0
12	17,51	17,27	18,25	23,47	20,8	19,5	19,2
14	20,88	20,23	21,28	27,59	24,3	22,7	22,4
16	24,28	23,44	24,31	31,53	27,7	26,0	25,6
18	28,04	26,89	27,35	35,5	31,2	29,2	28,8
20	33,51	29,96	30,47	39,44	34,7	32,4	32,0
η_{10}^* , %	-	-	6,5	37,4	21,7	13,9	12,4
η_{20}^* , %	-	-	-4,0	24,3	9,2	2,2	0,8
* η_{10} , η_{20} - відхилення теоретичних значень вертикальних переміщень від значень випробування експериментальним шляхом натурних зразків, виражених %, при завантаженні відповідно в 10 кНм та 20 кНм.							

З таблиці 2 видно, що всі варіанти моделювання армування СЕ на ЛІРА-САПР дають хорошу збіжність з експериментальними результатами. Проте найбільшу точність дають 3 способи армування, який приводить площу армування до площі моделі пластин. Проте для зручності використання і зменшення трудоемності роботи є перший спосіб моделювання арматури, з використанням стержневих СЕ. До його переваг можна віднести можливість його уточнення, ми можемо з легкістю поміняти площу арматури і проаналізувати загальні зміни, які проходять в балці. В інших випадках такої можливості немає, тому що в другому способі моделювання необхідно перераховувати приведені модулі пружності, а в третьому способі потрібно корегувати на самій моделі товщини СЕ армування, що є дуже трудоемним процесом. Також перевагою першого методу моделювання є отримання напружень в дерев'яних елементах. Недоліком можна вважати необхідність зображення епюр напружень в армуючих стержневих елементах. При цьому визначення самих напружень буде виконуватись за формулами для арматури [7] та для вуглецевої стрічки [8].

$$\sigma_{arm,CE1} = N_{arm} / A_s, \quad (7)$$

$$\sigma_{carb,CE1} = N_{carb} / A_{carb}, \quad (8)$$

де N_{arm} , N_{carb} - зусилля в стержнях арматури і вуглецевої стрічки;

$\sigma_{arm,CE1}$, $\sigma_{carb,CE1}$ - напруження в стержнях арматури та вуглецевої стрічки.

Висновки. 1. При виконанні чисельного моделювання дерев'яних армованих балок за допомогою програмного комплексу ЛІРА-САПР було встановлено, що всі варіанти моделювання армування дають хорошу збіжність результатів при визначенні прогинів балки. Значення відхилення складають в середньому 11%, що для матеріалу деревини є хорошим результатом. 2. Порівняння результатів отриманих ізополів напружень та епюр напружень в центральному перерізі, показали, що всі методики є можливими для застосування, а саме використання кожної можливе для виконання певної задачі. 3. Моделювання арматури, як окремими стержнями слід використовувати в задачах коли необхідно визначити напруження саме в деревині, при цьому визначення напружень в арматурі буде виконуватись за допомогою формул. На противагу першого варіанту моделювання в третьому випадку напруження в арматурі можна визначити відразу з епюр напружень. 4. В загальному слід відзначити, що моделювання плоскими СЕ зменшує трудомісткість при моделюванні, а плоскі елементи є хорошою альтернативою для використання.

Література

1. ДБН В.2.6-161:2017 “Дерев'яні конструкції. Основні положення” - Київ, “Укрархбудінформ” 2017. – 111 с.
2. ДСТУ-Н Б В.2.6-184:2012 “Конструкції з цільної і клеєної деревини. Настанова з проектування” - Київ, “Укрархбудінформ” 2013. – 120с.
3. Гомон П.С., Гомон С.С., Сасовський Т.А. Розрахунок дерев'яних балок прямокутного перерізу з врахуванням утворення складок в стиснутій зоні. Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі і споруди: Збірник наукових праць. – Рівне: НУВГП, 2016. – Вип. 32. – С. 137–142.
4. Pavluk A., Gomon S., Ziatyuk Y., Gomon P., Homon S., Kulakovskiy L., Iasnii V., Yasniy O., & Imbirovych N. Stiffness of solid wood beams under direct and oblique bending conditions. Acta Facultatis Xylogiae Zvolen, 2023, 65(2), 109–122. <https://doi.org/10.2478/afx-2023-0014>
5. Sobczak-Piąstka J., Pavluk A., Gomon S.S., Gomon P., Homon S., Lynnyk I. Changing the position of the neutral line of beams made of glued wood in conditions of oblique bending. AIP Conf. Proc. 2928, 080007, 2023. <https://doi.org/10.1063/5.0170371>
6. Gomon S., Gomon S., Gomon P., Shkirenko S. The basis of the deformation method for calculating of elements from wood under cross-section bending. International Journal of Engineering & Technology, 2018, Vol. 7 (4.8), P. 109–114. <https://doi.org/10.14419/ijet.v7i4.8.27223>
7. Гомон П.С., Поліщук М.В. Напружено-деформований стан балок із деревини з комбінованим армуванням на різних рівнях завантажень. Сучасні технології та методи розрахунків у будівництві. – Луцьк: ЛНТУ, 2022. – Вип. 17. – С. 23–30. [https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2022-7\(17\)-03](https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2022-7(17)-03)
8. Гомон П.С. Апроксимація діаграми «момент-кривина» дерев'яних армованих та неармованих балок прямокутного перерізу. Містобудування та територіальне планування. – Київ: КНУБА, 2021. – № 78. – С. 157–165. <https://doi.org/10.32347/2076-815x.2021.78.157-165>

9. Гомон П.С. Моделювання роботи дерев'яної балки з послідовним завантаженням. Містобудування та територіальне планування. – Київ: КНУБА, 2022. – № 80. – С. 159–165. <https://doi.org/10.32347/2076-815x.2022.80.159-165>
10. Гомон П.С. Сумісність роботи арматури та деревини в балках, які працюють за поперечного згину. Сучасні проблеми архітектури та містобудування. – Київ: КНУБА, 2022. – Вип. 63. – С. 327–335. <https://doi.org/10.32347/2077-3455.2022.63.327-335>
11. Gomon P. Determination of tangential stresses in reinforced flexible wooden elements taking into account the nonlinearity of material deformation. Вісник Тернопільського національного технічного університету. – Тернопіль: ТНТУ, 2022. – Вип. 106. – С. 125–132. https://doi.org/10.33108/visnyk_tntu2022.02.125
12. Gomon P., Babych Ye., Polischuk M., Kysliuk D.Y., Bandura I., Pakholiuk O., Shevchuk A. Deformability of a glued wooden beam with pre-stressed composite reinforcement. Procedia Structural Integrity, 2024, Vol. 59, P. 551–558. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2024.04.078>
13. Гомон П.С. Аналіз використання металевої та неметалевої арматури для підсилення дерев'яних елементів та конструкцій. Сучасні проблеми архітектури та містобудування. – Київ: КНУБА, 2022. – Вип. 62. – С. 322–332. <https://doi.org/10.32347/2077-3455.2022.62.322-332>
14. Гомон С. С., Павлюк А. П. Робота балок з клеєної деревини в умовах косого згину. Вісник Львівського національного аграрного університету: зб. наук. праць. – Львів, 2018. – Вип. 19. – С. 84–89. <https://doi.org/10.31734/architecture2018.19.084>
15. Д. В. Михайловський, М. А. Комар. Армування конструкцій з деревини композитними матеріалами, стан і перспективи. Будівельні конструкції, теорія і практика № 9 КНУБА, 2021- С. 72-80. <https://doi.org/10.32347/2522-4182.9.2021.72-80>
16. Барабаш М.С., Медведенко Д.В., Палієнко О.І. Програмні комплекси САПФІР і ЛІРА-САПР – основа вітчизняних ВІМ-технологій: монографія. – Київ: Нац. авіац. ун-т, 2023. – 156 с.
17. Михайловський Д. Method of calculation of panel buildings from cross-laminated timber. Опір матеріалів і теорія споруд: науково-технічний збірник. – Київ: КНУБА, 2021. – Вип. 107. – С. 75–88. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2021.107.75-88>
18. Михайловський Д.В., Комар А.А. Перехресно клеєдощаті панелі та методи їх розрахунку. Будівельні конструкції. Теорія і практика: збірник наукових праць / КНУБА. – 2018. – Вип. 2. – С. 146–153. <https://doi.org/10.32347/2522-4182.2.2018.146-153>
19. Mykhalovskiy D., Komar M. Analysis of the stress-strain state of laminated timber beams reinforced with composite tapes. Academic Journal Industrial Machine Building, Civil Engineering, 2022, № 2(57), P. 90–97. <https://doi.org/10.26906/znp.2021.57.2590>
20. Михайловський Д.В., Матющенко Д.М. Методика створення розрахункової схеми гнутоклеєних рам за допомогою методу скінчених елементів. Будівельні конструкції. Теорія і практика: Збірник наукових праць / КНУБА. – 2018. – Вип. 2. – С. 99–107. https://library.knuba.edu.ua/books/zbirniki/18/2018_2.pdf
21. Denys Mykhailovskiy, Oleg Komar, Mykola Komar Engineering method of calculating laminated timber elements reinforced with composite tapes / Опір матеріалів і теорія споруд / Strength of Materials and Theory of Structures: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2022. – Вип. 109. – С. 239-262. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2022.109.239-262>
22. D.V. Mykhailovskiy, M.A. Komar Definition of the stress-strain state of a glued laminated timber beam reinforced with composite strips using experimental method / Strength of Materials and Theory of Structures: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2024. – Вип. 112. – С. 43-51. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2024.112.43-51>
23. Михаловський Д.В., Гомон П.С. Дослідження роботи попередньо-напружених дерев'яних балок з клеєної деревини. Містобудування та територіальне планування. – Київ: КНУБА, 2024. – № 87. – С. 246–254. <https://doi.org/10.32347/2076-815x.2024.87.246-254>
24. Михайловський Д.В., Гомон П.С. Верифікація методик моделювання армованих та неармованих дерев'яних балок. Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та

споруди. – Рівне: НУВГП, 2024. – Вип. 46. – С. 237–249.
<https://doi.org/10.31713/budres.v0i46.28>

25. Бабич Є.М., Гомон П.С. Експериментальні дослідження попередньо напружених комбіновано армованих балок з цільної деревини. Ресурсоекономічні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. – Рівне: НУВГП, 2024. – Вип. 45. – С. 96–105.
<https://doi.org/10.31713/budres.v0i45.11>

References

- [1]. DBN V.2.6-161:2017 “Derev’iani konstruktsii. Osnovni polozhennia” – Kyiv, “Ukrarkhbudinform”, 2017. – 111 s.
- [2]. DSTU-N B V.2.6-184:2012 “Konstruktsii z tsilnoi i kleienoi derevyny. Nastanova z proektuvannia” – Kyiv, “Ukrarkhbudinform”, 2013. – 120 s.
- [3]. Homon P.S., Homon S.S., Sasovskyi T.A. Rozrakhunok derev’ianykh balok priamokutnoho pererizu z urakhuvanniam utvorennia skladok v stysnutii zoni. Resursoekonomni materialy, konstruktsii, budivli i sporudy: Zbirnyk naukovykh prats. – Rivne: NUVHP, 2016. – Vyp. 32. – S. 137–142.
- [4]. Pavluk A., Gomon S., Ziatiuk Y., Gomon P., Homon S., Kulakovskiy L., Iasnii V., Yasniy O., & Imbirovych N. Stiffness of solid wood beams under direct and oblique bending conditions. *Acta Facultatis Xylologiae Zvolen*, 2023, 65(2), 109–122. <https://doi.org/10.2478/afx-2023-0014>
- [5]. Sobczak-Piąstka J., Pavluk A., Gomon S.S., Gomon P., Homon S., Lynnyk I. Changing the position of the neutral line of beams made of glued wood in conditions of oblique bending. *AIP Conf. Proc.*, 2928, 080007, 2023. <https://doi.org/10.1063/5.0170371>
- [6]. Gomon S., Gomon S., Gomon P., Shkirenko S. The basis of the deformation method for calculating of elements from wood under cross-section bending. *International Journal of Engineering & Technology*, 2018, Vol. 7 (4.8), P. 109–114. <https://doi.org/10.14419/ijet.v7i4.8.27223>
- [7]. Homon P.S., Polishchuk M.V. Napruzhenno-deformovanyi stan balok iz derevyny z kombinovanim armuvanniam na riznykh rivniakh zavantazhen. Suchasni tekhnolohii ta metody rozrakhunkiv u budivnytstvi. – Luts'k: LNTU, 2022. – Vyp. 17. – S. 23–30. [https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2022-7\(17\)-03](https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2022-7(17)-03)
- [8]. Homon P.S. Aproksymatsiia diiahrafy «moment-kryvyna» derev’ianykh armovanykh ta nearmovanykh balok priamokutnoho pererizu. Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia. – Kyiv: KNUBA, 2021. – № 78. – S. 157–165. <https://doi.org/10.32347/2076-815x.2021.78.157-165>
- [9]. Homon P.S. Modeliuvannia roboty derev’ianoï balky z poslidovnym zavantazhenniam. Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia. – Kyiv: KNUBA, 2022. – № 80. – S. 159–165. <https://doi.org/10.32347/2076-815x.2022.80.159-165>
- [10]. Homon P.S. Sumisnist roboty armatury ta derevyny v balkakh, yaki pratsiuiut za poperechnoho zhynu. Suchasni problemy arkhitektury ta mistobuduvannia. – Kyiv: KNUBA, 2022. – Vyp. 63. – S. 327–335. <https://doi.org/10.32347/2077-3455.2022.63.327-335>
- [11]. Gomon P. Determination of tangential stresses in reinforced flexible wooden elements taking into account the nonlinearity of material deformation. *Visnyk Ternopil'skoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu*. – Ternopil: TNTU, 2022. – Vyp. 106. – S. 125–132. https://doi.org/10.33108/visnyk_tntu2022.02.125
- [12]. Gomon P., Babych Ye., Polishchuk M., Kysliuk D.Y., Bandura I., Pakholiuk O., Shevchuk A. Deformability of a glued wooden beam with pre-stressed composite reinforcement. *Procedia Structural Integrity*, 2024, Vol. 59, P. 551–558. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2024.04.078>
- [13]. Homon P.S. Analiz vykorystannia metalevoi ta nemetalevoi armatury dlia pidsylennia derev’ianykh elementiv ta konstruktsii. Suchasni problemy arkhitektury ta mistobuduvannia. –

- Kyiv: KNUBA, 2022. – Vyp. 62. – S. 322–332. <https://doi.org/10.32347/2077-3455.2022.62.322-332>
- [14]. Homon S.S., Pavliuk A.P. Robota balok z kleienoi derevyny v umovakh kosoho zhynu. Visnyk Lvivskoho natsionalnoho aharnoho universytetu: zbirnyk naukovykh prats. – Lviv, 2018. – Vyp. 19. – S. 84–89. <https://doi.org/10.31734/architecture2018.19.084>
- [15]. Mykhailovskyi D.V., Komar M.A. Armuvannia konstruktsii z derevyny kompozytnymy materialamy, stan i perspektyvy. Budivelni konstruktsii, teoriia i praktyka, № 9. – KNUBA, 2021. – S. 72–80. <https://doi.org/10.32347/2522-4182.9.2021.72-80>
- [16]. Barabash M.S., Medvedenko D.V., Paliienko O.I. Prohramni komplek sy SAPFIR i LIRA-SAPR – osnova vitchyznianskykh BIM-tekhnologii: monohrafiia. – Kyiv: Nats. aviats. un-t, 2023. – 156 s.
- [17]. Mykhailovskyi D. Method of calculation of panel buildings from cross-laminated timber. Opir materialiv i teoriia sporud: nauково-tekhnichniy zbirnyk. – Kyiv: KNUBA, 2021. – Vyp. 107. – S. 75–88. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2021.107.75-88>
- [18]. Mykhailovskyi D.V., Komar A.A. Perekhresno kleidoshchati paneli ta metody yikh rozrakhunku. Budivelni konstruktsii. Teoriia i praktyka: zbirnyk naukovykh prats / KNUBA. – 2018. – Vyp. 2. – S. 146–153. <https://doi.org/10.32347/2522-4182.2.2018.146-153>
- [19]. Mykhaylovskyi D., Komar M. Analysis of the stress-strain state of laminated timber beams reinforced with composite tapes. *Academic Journal Industrial Machine Building, Civil Engineering*, 2022, № 2(57), P. 90–97. <https://doi.org/10.26906/znp.2021.57.2590>
- [20]. Mykhailovskyi D.V., Matiushchenko D.M. Metodyka stvorennia rozrakhunkovoi skhemy hnutokleienykh ram za dopomohoiu metodu skinchenykh elementiv. Budivelni konstruktsii. Teoriia i praktyka: Zbirnyk naukovykh prats / KNUBA. – 2018. – Vyp. 2. – S. 99–107. https://library.knuba.edu.ua/books/zbirniki/18/2018_2.pdf
- [21]. Denys Mykhailovskyi, Oleg Komar, Mykola Komar. Engineering method of calculating laminated timber elements reinforced with composite tapes. Opir materialiv i teoriia sporud / Strength of Materials and Theory of Structures: nauk.-tekhn. zbirnyk. – Kyiv: KNUBA, 2022. – Vyp. 109. – S. 239–262. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2022.109.239-262>
- [22]. D.V. Mykhailovskyi, M.A. Komar. Definition of the stress-strain state of a glued laminated timber beam reinforced with composite strips using experimental method. Strength of Materials and Theory of Structures: nauk.-tekhn. zbirnyk. – Kyiv: KNUBA, 2024. – Vyp. 112. – S. 43–51. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2024.112.43-51>
- [23]. Mykhalovskyi D.V., Homon P.S. Doslidzhennia roboty poperedno-napruzhenykh derev'ianykh balok z kleienoi derevyny. Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia. – Kyiv: KNUBA, 2024. – № 87. – S. 246–254. <https://doi.org/10.32347/2076-815x.2024.87.246-254>
- [24]. Mykhailovskyi D.V., Homon P.S. Veryfikatsiia metodyk modeliuvannia armovanykh ta nearmovanykh derev'ianykh balok. Resursoekonomni materialy, konstruktsii, budivli ta sporudy. – Rivne: NUVHP, 2024. – Vyp. 46. – S. 237–249. <https://doi.org/10.31713/budres.v0i46.28>
- [25]. Babych Ye.M., Homon P.S. Eksperymentalni doslidzhennia poperedno napruzhenykh kombinovano armovanykh balok z tsilnoi derevyny. Resursoekonomni materialy, konstruktsii, budivli ta sporudy. – Rivne: NUVHP, 2024. – Vyp. 45. – S. 96–105. <https://doi.org/10.31713/budres.v0i45.11>

NUMERICAL MODELING OF THE BEHAVIOR OF A HYBRID-REINFORCED TIMBER BEAM USING PLANE FINITE ELEMENTS

Denys Mykhailovskiy, Doctor of Technical Sciences, Professor
ORCID: 0000-0003-3151-8630

Petro Gomon, Doctoral Student
p.s.homon@nuwm.edu.ua: ORCID: 0000-0003-2080-5650
Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv
Komar M.A., PhD, Junior Research Fellow,
ORCID: 0000-0002-3631-8999
SSTC NRS

Annotation: The study is devoted to the numerical modeling of reinforced wooden beams using the LIRA-SAPR software package. One of the main disadvantages of wooden beams is their excessive flexibility, which leads to large deflections and displacements. Reinforcing wooden beams with stiffening elements is an effective method for increasing their rigidity and reducing internal stresses. However, in current engineering practice, there is a lack of design guidelines and examples for modeling such reinforced wooden structures using modern software tools. Therefore, the aim of this work is to investigate different methods for modeling reinforcement in wooden beams using finite element analysis. The paper presents an analysis of recent publications where different reinforcement types—such as basalt, carbon, and glass fiber—were used in wooden structures. Special attention is given to the challenge of numerically modeling such reinforcements, particularly when using planar finite elements instead of volumetric ones, as this approach significantly reduces computational complexity. Three reinforcement modeling methods are proposed and tested: 1) placing reinforcing bars between planar finite element nodes; 2) adjusting the modulus of elasticity of the elements to reflect the combined stiffness of wood and reinforcement; 3) modeling reinforcement as a separate layer with equivalent cross-sectional area. Each method was implemented and analyzed for accuracy and practicality. Experimental data from full-scale beam tests were used for comparison. Results indicate that all three methods provide acceptable accuracy, with deviations from experimental deflection values averaging around 11%, which is considered satisfactory for wood materials. Stress distributions obtained through numerical analysis showed good agreement across methods, though each has specific advantages. For instance, modeling reinforcement as individual bars allows precise evaluation of stresses in wood, whereas layer-based modeling offers direct assessment of stresses in reinforcement elements. The study demonstrates that numerical modeling of reinforced wooden beams using planar finite elements in LIRA-SAPR is a reliable and efficient alternative to volumetric modeling. Each proposed method can be effectively applied depending on the design goal, offering engineers flexibility in structural analysis and optimization.

Key words: timber, timber beam, timber structure, reinforcement.